

Optimális irányítási feladatok

1. A Pontrjagin-féle maximumelv segítségével oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatokat (adjuk meg az optimális irányítást és az optimális trajektóriát):

a. $\ddot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(T) = 1$, $\dot{x}(T) = 0$, $T \rightarrow \min$.

b. $\dot{x} = -(4t + 1)x + (2t + 1/2)u$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$, $\int_0^1 (4t + 1)u^2 dt \rightarrow \min$.

c. $\dot{x} = -x^2 + u$, $|u| \leq 1$, $x(0) = 0$, $x(T) = 1$, $T \rightarrow \min$.

d. $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_2(t_1) - x_1(t_1) + \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min$.

e. $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$, $\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min$.

f. $\dot{x} = x^2 + u$, $|u| \leq 1$, $x(0) = 0$, $x(t_1) = 1$, $T \rightarrow \min$.

g. $\dot{x} = x + u$, $|u| \leq 1$, $x(0) = 5$, $x(T) = 11$, $T \rightarrow \min$.

h. $\dot{x} = 1 - u^2$, $x(0) = 1$, $\int_0^1 (x + u) dt \rightarrow \max$. (!!)

i. $\dot{x}_1 = x_2 + u_1$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, $x_1(0)^2 + x_2(0)^2 = 1$,
 $x_1(t_1) = 2$, $x_2(t_1) = 0$, $t_1 \rightarrow \min$.

2. Írjuk fel a Hamilton-Jacobi-Bellmann egyenletet az 1. feladat d. pontjában, feltéve, hogy t_1 adott, illetve a következő esetekben:

a. $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$, $\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min$.

b. $\dot{x} = 2ux$, $x(0) = 1$, $u(t) \in [0, 1]$, $-x(1) - \int_0^1 (1 - u)x dt \rightarrow \min$.

c. $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $\int_0^T [(x - \cos t)^2 + u^2] dt \rightarrow \min$.

3. Oldjuk meg az 1. feladat h. pontját dinamikus programozási feladatként is, $V(t, x)$ -et $p(t)x + q(t)$ alakban keresve.

4. Oldjuk meg közvetlenül és a diszkrét H-J-B egyenlettel is:

$$x_{k+1} = 2x_k + 2u_k, \quad x_0 \text{ adott, } x_2^2/2 + \sum_{k=0}^1 u_k^2 \rightarrow \min.$$

5. Legyen $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3\}$, az $f(x, u)$ és $L(x, u)$ értékei az alábbi táblázattal adottak (a sorok x , az oszlopok u növekvő értékei szerint):

1	6	4	3	*	5	1	1	3
2	1	5	3	*	0	9	3	1
3	2	1	4	*	1	5	10	1
4	5	1	3	*	5	10	1	1
5	4	2	6	*	10	1	1	5
6	1	5	5	*	1	1	5	10

A feladat:

$$10(x_3 - 1) + \sum_{k=0}^2 L(x_k, u_k) \rightarrow \min.$$

Ábrázoljuk az átmenetek költségeit egy 6 csúcspontú gráfon, adjuk meg az optimális irányítást és trajektóriát, ha $x_0 = 4$.